Über das Verhalten von Taschenuhren.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde der Hohen philosophischen Fakultät der Universität Leipzig vorgelegt von

Erhard Kleinstück

aus Zwätzen.

Weida i. Th.

Druck von Thomas & Hubert

Spezialdruckerei für Dissertationen

1913.

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren

Bruns und **Des Coudres.**

Leipzig, den 29. Juli 1913.

Der Procancellar,
Le Blanc.

Meiner Mutter
und dem Andenken meines Vaters.

Inhalt.

Einleitung.

§ 1. Die vorliegende Arbeit ist auf eine Anregung des Herrn Prof. H. Bruns hin entstanden. Sie schließt sich an zwei Arbeiten an, die auf demselben Gebiete liegen. Es sind dies die Inauguraldissertationen von A. Krause, „Studien über das Verhalten von Taschenuhren" (veröffentlicht in den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, LVIII. Band, S. 247 ff.) und von K. Gey, „Untersuchung über den Gang von Taschenuhren" (Leipzig 1909). Daneben wird noch öfters eine Arbeit zu erwähnen sein, in der analoge Untersuchungen über Pendeluhren dargestellt sind: K. Thierig, „Über das Verhalten von Pendeluhren" (Inauguraldissertation, Leipzig 1911).

Gey hat eine große Anzahl von Uhren mit kurzer Beobachtungsdauer untersucht. Ich hatte nun die Aufgabe, sehr lange Beobachtungsreihen von wenigen Uhren zu bearbeiten und zu prüfen, wie sich das Ergebnis zu dem von Gey gefundenen verhält. Das sei noch etwas näher ausgeführt. Gey hatte als Beobachtungsmaterial die Gangregister von 524 Uhren. Ein solches Gangregister enthielt die Beobachtungen von vier Wochen in vier Lagen, die durch die Bezeichnungen „Erstes Tragen", „Liegen", Zweites Tragen", „Hängen" charakterisiert sind. Durch den Lagenwechsel zwischen je zwei Wochen wurde ein Zwischengang und zwei Zwischenvariationen hervorgerufen. Die sechs innerhalb einer Lage liegenden sog. reinen Gänge wurden untersucht und dabei zeigte sich eine Abhängigkeit der fünf folgenden vom ersten Gang, die nach dem Gesetz der konstanten Nachwirkung verläuft. (Wenn hier und im folgenden — dem Gebrauche bei Gey und Thierig folgend — von einem Gesetze die Rede ist, so muß man sich davor hüten, das etwa in dem Sinne aufzufassen, den dieses Wort sonst in der Naturwissenschaft meist besitzt. Hier liegt vielmehr nur eine Annahme vor, die vorläufig durch die Erfahrung bestätigt ist, nicht mehr. Man würde also vielleicht treffender von einer Regel sprechen.) Meine Aufgabe war es nun, zu prüfen, ob dieses Gesetz auch für eine lange Reihe von Beobachtungen Geltung besitzt.

Man könnte meinen, das sei eigentlich selbstverständlich, wenn anders das gegebene Uhrenmaterial mit dem von Gey untersuchten auf gleiche Stufe zu stellen sei. Aber ich möchte doch auf einen Unterschied hinweisen, der geeignet sein könnte, den Nachweis des Gesetzes — wenigstens auf mehr als zwei oder drei Tage — zu erschweren. Während nämlich dort — bei Gey — nur der erste reine Gang als Ausgangspunkt benutzt und sein Einfluß auf die fünf folgenden Gänge untersucht wird, muß man es hier — bei langen Beobachtungsreihen — so einrichten, daß jeder Gang einmal als der erste auftritt. Greift man nun aus der Reihe einen beliebigen Gang heraus, so steckt in diesem eine Nachwirkung der vorhergehenden Tage; eigentümlich ist diesem Gange nur die auftretende Zufälligkeit. Ist diese nun recht groß, überwiegt vielleicht gar den andern Teil erheblich, so wird dieser Gang gewiß recht gut geeignet sein, um bei den folgenden eine Nachwirkung hervorzurufen. Faßt man ihn aber als zweiten Gang auf, so ist klar, daß er an seinem Teile nur wenig dazu beitragen wird, eine Abhängigkeit des folgenden vom vorhergehenden Gange erkennen zu lassen, daß er sogar dieser Erkenntnis entgegenstehen kann.

Daraus geht hervor, daß diese Art der Betrachtungsweise, zu der man bei langen Reihen gezwungen ist, einen wesentlichen Einfluß auf das Ergebnis haben kann. Und diesem Gedanken wird man sich umso weniger verschließen können, als die erstmalige Anwendung der geschilderten Behandlungsweise auf lange Reihen durch Thierig mit einem negativen Ergebnis geendet hat. Wenngleich Thierig selbst diese Erklärung seines Mißerfolges anscheinend nicht in Erwägung gezogen hat, sondern die Schuld daran in einem wesentlich anderen Verhalten der Pendeluhren als der Taschenuhren sucht, so wird man doch nach dem oben Gesagten zugeben müssen, daß die Möglichkeit dieser Erklärung nicht von vornherein von der Hand zu weisen ist.

Damit ist denn auch die Berechtigung der vorliegenden Arbeit gegeben. Ihr Ergebnis wird ein Urteil gestatten nicht nur über die Geyschen Ergebnisse, sondern auch über die oben angedeutete und von Thierig erstmalig verwendete Behandlungsweise von langen Reihen.

§ 2. Was Bezeichnungen und Formeln aus dem Gebiete der Kollektivmaßlehre anlangt, so verweise ich auf das Lehrbuch von H. Bruns „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre“, Leipzig 1906. Die Begriffe des Durchschnitts und der Streuung als bekannt vorausgesetzt, seien hier noch kurz die Definitionsgleichung für das Symbol [. . ., . . .], sowie die darauf bezüglichen Relationen angegeben:

$$[x, y] = \mathfrak{D}(x\,y) - \mathfrak{D}(x)\,\mathfrak{D}(y)$$

$$[x, y] = [y, x]$$

$$[x, x] = \mathrm{str}\,(x)^2$$

$$[a\,x, y] = a\,[x, y]$$

$$[x, y \pm z] = [x, y] \pm [x, z].$$

Das Beobachtungsmaterial.

§ 3. Das Material bildeten die täglichen Beobachtungen von fünf Taschenuhren. Zwei von ihnen stammten aus der Fabrik von A. Lange & Söhne in Glashütte, die drei andern von der Firma J. Assmann in Glashütte.

Die beiden Lange-Uhren (Lange 32251 und 32254), bezeichnet mit LA und LB, gehören der Leipziger Sternwarte; sie sind über zwei Jahre lang fortlaufend beobachtet worden, von 1910 Jan. 27 bis 1912 Febr. 29. Davon waren allerdings bei LA die Tage von 1910 Dez. 31 bis 1911 Jan. 16 auszuschließen, in denen offenbar eine außergewöhnliche Störung vorlag. Aus demselben Grunde waren bei LB die Tage von 1911 Sept. 19 an fortzulassen. Es sei gleich an dieser Stelle bemerkt, daß diese beiden Uhren überhaupt nicht „gut" gingen in dem Sinne, daß sie etwa den Bedingungen der Prüfungsordnung (s. Krause, a. a. O., S. 247 f.) hätten standhalten können; vielmehr schwanken die Variationen zwischen $+24.1^s$ und -26.0^s bei LA und zwischen $+6.5^s$ und -10.3^s bei LB. Die beiden Uhren waren ursprünglich sehr gut gewesen, hatten aber später beim Gebrauch verschiedene Schädigungen erfahren.

Die andern drei Uhren, bezeichnet mit $A1$, $A2$, $A3$, waren von der Firma J. Assmann als Versuchsuhren zur Verfügung gestellt worden. Die Beobachtung wurde hier nicht fortlaufend, sondern abwechselnd mit kompensierter und nicht kompensierter Unruhe vorgenommen. Jede Reihe erstreckte sich auf durchschnittlich 58 Tage; dann wurden die Uhren wieder an die Fabrik gesandt, die Unruhen ausgewechselt und nach der Rücksendung die Beobachtung wieder aufgenommen. Im Falle der nicht kompensierten Unruhen wurden die Uhren vor Beginn oder am Ende der eigentlichen Beobachtungsreihe auf einige Tage in den Heizschrank gebracht. Die mit der starken Temperatur-differenz auftretenden außerordentlich hohen Variationen waren dann bei der Ermittlung des Temperaturkoeffizienten von Wert. Auf diese Weise ergaben sich fünf „kompensierte" Reihen von insgesamt 292 Tagen, und fünf „nicht kompensierte" Reihen von 290 Tagen Umfang. Durch die Zusammenfassung dieser Reihen ergaben sich also für jede Uhr je eine „kompensierte" und eine „nicht kompensierte" Reihe, die in der Abkürzung durch Zusatz von k bez. nk zu der Bezeichnung der Uhr kenntlich gemacht wurden. Bei kompensierter Unruhe gingen die Uhren recht gut, besonders $A\,2$ und $A\,3$, bei denen die Variationen sämtlich zwischen $+18$ und -18 lagen, während bei $A\,1$ die Verteilungstafel bedeutend weiter auseinandergezogen war und die Außenwerte $+39$ und -41 aufwies (Einheit: Zehntelsekunde).

§ 4. Um aus den Beobachtungswerten zu den Argumenten für die Kollektivreihen zu gelangen, wurden die zweiten Differenzen gebildet. Die ersten Differenzen der beobachteten Korrektionen stellen die Gänge dar, die Differenzen der Gänge wiederum die Variationen. Darüber ist sowohl bei Gey als bei Thierig ausführlich berichtet worden, sodaß ich mich hier darauf beschränken kann, nur die aus diesen Beziehungen entspringenden Gleichungen zu wiederholen. Bezeichnet man nämlich die Korrektionen mit k_1, k_2, . . ., die Gänge mit g_1, g_2, . . . und die Variationen mit v_1, v_2, . . ., so gilt

$$(1) \qquad \begin{aligned} k_i - k_1 &= g_1 + g_2 + \cdots + g_{i-1} \\ g_i - g_1 &= v_1 + v_2 + \cdots + v_{i-1}, \end{aligned}$$

wobei i jede beliebige Nummer sein kann.

Als Einheit galt die Zehntelsekunde, negative Gänge und Variationen wurden durch die dekadische Ergänzung ersetzt.

Bei den Ank ist die Temperatur von starkem Einfluß. Für diese mußte also auch eine Kollektivreihe aufgestellt werden. Man hätte als Argumentwerte die ersten Differenzen der bei der Uhrbeobachtung abgelesenen Temperaturen nehmen können. Doch zeigt eine nähere Untersuchung, daß der Einfluß besser zum Ausdruck kommt, wenn man von je zwei benachbarten Temperaturwerten die Mittel nimmt und die Differenzen davon als Argumente benutzt. Hierbei galt als Einheit das Zehntelgrad.

§ 5. Die Korrektionen sind in den Uhrbüchern verzeichnet. Hieraus waren sie zu entnehmen, in Tabellenform zu bringen und das Differenzenschema anzulegen. Diese Arbeit war bereits begonnen und ich habe sie fertiggestellt. Auffällige Werte wurden nochmals untersucht und konnten meistens durch Zurückgehen auf das Uhrbuch, manchmal auch durch Nachprüfen des Chronographenstreifens beseitigt werden. Das Auffinden solcher Fälle wurde bei den Assmann-Uhren sehr wesentlich dadurch erleichtert, daß deren Variationen unmittelbar nebeneinander standen. Da die Uhren in sich einen sehr gleichmäßigen Gang aufwiesen, so fiel ein Versehen in der Korrektion einer der drei Uhren, das ja in drei Variationen zum Ausdruck kommt, ganz von selbst und sehr deutlich in die Augen.

§ 6. Um eine Übersicht zu ermöglichen, wurden die Beobachtungstage fortlaufend numeriert, und zwar für die Lange- und Assmann-Uhren getrennt. Der Umfang der Reihen für die beiden Lange-Uhren mit 600 und 746 Tagen schien groß genug, um eine Teilung zu ermöglichen. Diese wurde ganz willkürlich vorgenommen, es wurden die Tage mit geraden Nummern und die mit ungeraden für sich zusammengefaßt. Man hat dadurch den Vorteil, aus dem mehr oder weniger guten Übereinstimmen der Ergebnisse für die „gerade“ und „ungerade“ Reihe einen Schluß auf die der Methode anhaftende Unsicherheit ziehen zu können. Allerdings spielt für diese Übereinstimmung auch die Homogenität des Materials eine wesentliche Rolle.

In der Abkürzung wurde die „gerade" und „ungerade" Reihe durch Zusatz eines *g* oder *u* zur Uhrbezeichnung ausgedrückt.

Zur besseren Übersicht führe ich zusammenfassend nochmals die Reihen an, die zur Behandlung standen, zugleich mit den Abkürzungen:

Lange	32 251	gerade		$= LAg$
„	„	ungerade		$= LAu$
Lange	32 254	gerade		$= LBg$
„	„	ungerade		$= LBu$
Assmann	1	kompensiert		$= A\,1\,k$
„	2	„		$= A\,2\,k$
„	3	„		$= A\,3\,k$
Assmann	1	nicht	kompensiert	$= A\,1\,nk$
„	2	„	„	$= A\,2\,nk$
„	3	„	„	$= A\,3\,nk$

Die Reihe der Temperaturdifferenzen tritt nicht selbständig auf, sondern ist bei Bearbeitung der *A nk* mit zu behandeln.

Die Zählkarten.

§ 7. In ganz ähnlicher Weise wie Thierig habe auch ich das Verfahren der Zählkarten angewandt, um zu den Verteilungslisten zu gelangen. Ein 8 cm breiter Kartonpapierstreifen wurde in gleich große Felder eingeteilt. In jedem Feld wurde rechts an die Seite die fortlaufende Nummer quer gestempelt, obenhin kam das Argument dieses Tages und darunter die Argumente der folgenden Tage. Ein gestaffeltes Lineal erleichterte diese Arbeit wesentlich und führte vor allen Dingen die nötige Gleichmäßigkeit herbei.

Die Zählkarten wurden für die Lange- und für die Assmann-Uhren getrennt hergestellt. Jene enthielten die

Argumente für LA und LB, diese die für die drei A-Uhren, bei den Ank außerdem noch die zugehörigen Temperaturvariationen.

Zuletzt wurde der Streifen zerschnitten, wodurch die einzelnen Karten entstanden. Nunmehr konnte die Trennung bei den L-Uhren nach gerade und ungerade erfolgen, ebenso die Zusammenlegung der fünf kompensierten und der fünf nicht kompensierten Reihen bei den A-Uhren zu je einer einzigen.

Als Beispiel sei eine Zählkarte aus der Reihe der Ank angeführt:

33	49	28	3	
995	986	996	0	
967	965	959	96	
958	968	984	98	438
20	12	7	1	
20	21	19	2	
983	983	986	99	
993	977	984	98	

Die drei ersten Spalten enthalten die Variationen von $A\,1\,nk$, $A\,2\,nk$, $A\,3\,nk$ in den Tagen 1911 Juli 30 bis August 6 (fortlaufende Nummer 438 bis 445), die letzte Spalte die entsprechenden Temperaturvariationen. Bei den Ak fiel diese Spalte weg, bei den L-Uhren waren nur zwei Spalten, für LA und LB, vorhanden.

Wie schon erwähnt, bedeuten dabei alle Zahlen über 500 oder 50 dekadische Ergänzungen von negativen Werten.

Die Auszählung.

§ 8. Es ist hier nicht nötig, das Verfahren der Auszählung „nach Paaren“ eingehend zu schildern, nachdem es schon bei Thierig mit aller nötigen Ausführlichkeit beschrieben worden ist. Denn da mein Material, wie schon erwähnt, dem Thierigschen insofern völlig gleichgeartet war, als auch mir lange fortlaufende Reihen vorlagen, so mußte notwendigerweise auch die Behandlung nach gleichen Gesichtspunkten und Grundsätzen vor sich gehen. Indem ich also auf §§ 13—16 der genannten Arbeit verweise, beschränke ich mich hier darauf, die einzelnen Operationen aufzuzählen, die man hierbei auszuführen hat.

Die beiden Argumente, die bei einer Auszählung als „Paar“ auftreten, sind: Variation des ersten Tages, bezeichnet mit a, und Variation eines der folgenden Tage, bezeichnet mit b, c, d, e, f, allgemein mit a'. Aus rein äußerlichen Gründen, die sich aus der Größe der zu benutzenden Zählbogen ergeben, führt man, wenn der Kern der Verteilung über mehr als 45 Argumente ausgebreitet ist, ein Nummernargument ein, indem man die ursprünglichen Argumente zu je h zusammenfaßt und die Wechselpunkte symmetrisch zum Nullpunkt legt. Das machte sich nötig bei *LA* und bei den *Ank*, wo $h = 7$, bez. $h = 13$ gewählt wurde.

Man stellt nun für jede Auszählung einen Zählbogen mit doppeltem Eingang auf, in dessen Felder die Häufigkeiten des auszuzählenden Paares a, a' eingetragen werden. Vom Zählbogen aus kommt man auf die Verteilungstafeln für a, a', $a + a'$, $a - a'$. Für diese Größen berechnet man dann nach der I. Summenmethode den linearen und quadratischen Durchschnitt, benutzt dabei die Summation von den Enden nach der Mitte zu wegen der sich dabei bietenden wertvollen Kontrollen. Dann geht man zu den Streuungsquadraten über mit der Formel:

$$\mathrm{str}\,x^2 = \mathfrak{D}(x^2) - (\mathfrak{D}\,x)^2$$

und gelangt schließlich zu den $[a, a']$ nach der Formel:

$$4\,[a, a'] = \mathrm{str}\,(a + a')^2 - \mathrm{str}\,(a - a')^2.$$

Bei der Auszählung wurden die üblichen Toleranzen $\mathfrak{D}x \pm 3.5$ str x zugrunde gelegt und alle jenseits liegenden Werte ausgeschlossen. Die Anzahl dieser „sporadischen Fälle" hielt sich in bescheidenen Grenzen, wenn auch der Prozentsatz, namentlich bei den L-Uhren, höher war als bei Thierig. Die Durchschnitte $\mathfrak{D}(x)$ waren wie bei Thierig als verschwindend klein zu betrachten.

§ 9. Auf die Gewinnung der oben angeführten Größen $[a, a']$ kommt es neben der der Streuungsquadrate hauptsächlich an. Denn sie gestatten eine Beurteilung der Abhängigkeit des a' von a, allerdings nur unter gewissen Voraussetzungen (s. Gey, a. a. O., § 20), die wir aber hier als erfüllt ansehen können. Außerdem dienen sie zur Bestimmung der Streuungsquadrate der Gangdifferenzen, worauf später noch näher einzugehen sein wird.

Die $[a, a']$ sind in dieser Form noch nicht gut brauchbar, da sie noch mit dem — jeweils verschiedenen — Streuungsquadrate des betr. Tages zusammenhängen. Um sie nun untereinander vergleichen zu können, dividiert man sie noch durch str a^2. Die so entstehende Größe nennt Thierig Abhängigkeitsmodul q und führt sie ein durch die Gleichung

(2) $$a' = q \cdot a + r,$$

wobei r der Teil von a' ist, der durch zufällige Störungen bedingt ist. Aus Zweckmäßigkeitsgründen — weil nämlich str a'^2 etwas verschieden von str a^2 ist — ändert man den Divisor noch ein wenig ab. Thierig nimmt statt str a^2 die Größe $[\mathrm{str}(a + a')^2 + \mathrm{str}(a - a')^2] : 4$, ich habe meist das geometrische Mittel $\sqrt{\mathrm{str}\,a^2 \cdot \mathrm{str}\,a'^2}$ dazu benutzt. Der Unterschied zwischen diesen beiden Größen ist meist unmerklich, da, wie schon gesagt, str a^2 und str a'^2 nahe beieinanderliegen. Die so entstehenden reduzierten $[a, a']$ nenne ich mit Thierig q_0. Ich teile sie in Tabelle I mit, und zwar für die *L*- und die *Ak*-Uhren. Bei den *Ank* haben diese Zahlen für sich wenig Wert, weil noch der Temperatureinfluß zu berücksichtigen ist. Das wird im nächsten Abschnitt eingehend behandelt werden.

§ 10. Thierig nennt die Größe q_0, die er als Abhängigkeitsmodul eingeführt hat (s. oben), später Nachwirkungsmodul (a. a. O., § 17). Das kann leicht verwirrend wirken, wenn man darauf achtet, wie Gey diese Bezeichnung eingeführt hat. Ich gebe den betr. Satz hier wörtlich an (Gey, a. a. O., § 21): „Wir bezeichnen die Konstante n als den Nachwirkungskoeffizienten oder den Modul der Nachwirkung, denn sie gibt an, mit welchem Betrage y von x abhängt, oder — wenn wir unter x und y etwa 2 Uhrgänge verstehen — wie stark der Gang x auf den Gang y nachwirkt entsprechend dem Ansatze $y = nx + z$, wo die von x unabhängige Größe z einen hinzukommenden unregelmäßigen Bestandteil bedeutet." Gey wendet dieses Wort also hier ausdrücklich auf die Nachwirkung zwischen Uhrgängen an. Wenn nun Thierig dieselbe Bezeichnung auch bei den Uhrvariationen benutzt, so ist das ja an sich kein Fehler, aber die Möglichkeit einer Verwechslung liegt doch dann recht nahe. Das muß aber wegen der grundsätzlichen Verschiedenheit der Nachwirkungskoeffizienten bei den Gängen von denen bei den Variationen, die gerade aus diesen Untersuchungen hervorgeht, durchaus vermieden werden.

Wer scharf auf diesen Unterschied achtet, der mag wohl auch stutzig werden bei folgendem Satz bei Thierig: „Diese Nachwirkungsmoduln (gemeint sind die der Variationen) zeigen insofern ein merkwürdiges, von dem für Taschenuhren beobachteten durchaus abweichendes Verhalten, als die Vorzeichen unregelmäßig hin- und herspringen."

Stellt man nämlich die Nachwirkungsmoduln der Variationen bei Gey zusammen, so ergibt sich, daß ihre Vorzeichen ebenfalls hin- und herspringen! Allerdings hat Gey diese q_0 nicht berechnet oder wenigstens nicht mitgeteilt; sie spielen bei seinem Rechenverfahren keine Rolle. Er gibt nur die $m^2 \cdot [a, a']$ an. Doch sind für die Frage nach den Vorzeichen auch diese brauchbar; denn da die Reduktion durch Divison mit m^2 und str a^2, also mit wesentlich positiven Größen zu erfolgen hätte, so würde sich das Vorzeichen dabei offenbar nicht ändern. Überblickt man nun in den Tabellen IV bis IX der Geyschen Arbeit die Vorzeichen der $m^2[a, b]$, $m^2[a, c]$, $m^2[a, d]$, $m^2[a, e]$ innerhalb jeder Gruppe, so stellt sich folgendes heraus: das Vorzeichen der ersten Größe ist — wie bei Thierig — durchweg das Minuszeichen; dann aber sind die drei Gruppen „Hängen" die einzigen, bei denen die vier Größen das gleiche Vorzeichen haben; bei den übrigen 13 Gruppen springen sie hin und her und auch nicht regelmäßig, denn von den sieben noch möglichen Kombinationen sind fünf vorhanden. Man kann also wohl kaum behaupten, daß hierin das Verhalten der Taschenuhren von dem der Pendeluhren durchaus abweiche. Sollte vielleicht Thierig selbst den Nachwirkungsmodul der Variationen mit dem der Gänge verwechselt haben?

Auch die Doppelbezeichnung Modul oder Koeffizient trägt nicht gerade zur Klärung der Sachlage bei. Überhaupt werden ja diese Wörter, wie Modul, Koeffizient, Faktor, Exponent u. a. in der Literatur oft an unrichtiger Stelle verwendet, ein Mißbrauch, der ihre Grenzen völlig verwischt und ihnen nur eine ganz verschwommene Bedeutung läßt. (Ich erinnere nur daran, daß das Brechungsverhältnis ebensowohl als Brechungsquotient wie als -index wie als -exponent bezeichnet wird!) Ich verwerfe daher alle diese Bezeichnungen und setze hier das deutsche Wort „Zahl" dafür ein.

Um nun — wenigstens für diese Arbeit — völlige Klarheit zu schaffen, nenne ich den Nachwirkungsmodul der Variationen (q bez. q_0) „Abhängigkeitszahl" und den der Gänge (n) „Nachwirkungszahl." Das sind zwar Bezeichnungen, denen ihre begrenzte und unterschiedliche Bedeutung erst hierdurch beigelegt wird — an sich könnte man sie ja ebensogut vertauscht anwenden —, aber ich halte das für zweckmäßig und bin jedenfalls dadurch der Mühe enthoben, immer beizufügen, ob es sich um Gänge oder Variationen handelt. Und ich hoffe, daß diese neuen Namen im Zusammenhange mindestens ebenso verständlich sind wie nur irgend eines der angeführten Fremdwörter.

§ 11. Nachdem wir oben gesehen haben, daß auch bei Gey die Vorzeichen der Abhängigkeitszahlen hin- und herspringen, wird es nicht verwunderlich sein, daß sich dieselbe Erscheinung auch bei den von mir berechneten Werten zeigt. Es sei aber festgestellt, daß die Abhängigkeitszahl zwischen der ersten und zweiten Variation bei Gey, wie bei Thierig, wie bei mir ohne Ausnahme negatives Vorzeichen hat. Diese Erscheinung wird stets auftreten, wenn der Uhr die Tendenz gegen einen konstanten Gang innewohnt. Jedenfalls ist sie beachtlich und ich werde später noch Gelegenheit nehmen, darauf zurückzukommen. Will man nun auch etwas über die Größe der Abhängigkeitszahlen aussagen und Vergleiche anstellen, so macht es sich zunächst nötig, diese Werte bei Gey zu berechnen. Ich sagte schon oben, daß er nur die $m^2 \cdot [a, a']$ mitgeteilt hat; und diese Größen selbst gestatten kaum, ein Urteil über die $[a, a']$ zu gewinnen, da das m^2 bei jeder Gruppe ein anderes ist und zwischen 44 521 und 250 416 schwankt. Ich habe also die Werte reduziert, wenigstens für die Gruppen III, die ja die wichtigsten sind, weil sie das ganze Material umfassen. Die dazu nötigen Streuungen der einzelnen Variationen finden sich in den Tabellen VIII bis XVII seiner Arbeit angegeben. Das Ergebnis teile ich in Tabelle II mit.

Wie verhalten sich nun die von mir behandelten Reihen? Man muß da wohl die Lange-Uhren von den *Ak*-Uhren scheiden. Diese zeigen entschieden Ähnlichkeit mit den Zahlen für Pendeluhren. Die erste Abhängigkeitszahl ist ziemlich groß, beinahe —0.5, die andern verhältnismäßig klein. Dagegen ähneln die Zahlen der *L*-Uhren mehr den bei Gey errechneten. Die Übereinstimmung zwischen den Reihen „gerade" und „ungerade" ist mäßig; man sieht, daß die Genauigkeit dieser Zahlen nicht allzu hoch einzuschätzen ist. Bei *LA* tritt der Fall ein, daß die erste Abhängigkeitszahl absolut genommen nicht die größte ist; bei *LAu* ist die zweite, bei *LAg* auch die dritte noch größer als die erste.

Die Beseitigung des Temperatureinflusses bei den *Ank*.

§ 12. Es ist schon mehrfach davon die Rede gewesen, daß bei den *Ank* die Abhängigkeit von der Temperatur zu berücksichtigen ist. Das ist ja auch ganz klar, denn dieser Einfluß wird eben erst durch die Kompensation der Unruhe aufgehoben. Will man nun die Abhängigkeitszahlen dieser Uhren richtig beurteilen, will man vor allem das Verhalten derselben Uhr vergleichen bei kompensierter und bei nicht kompensierter Unruhe, so muß man natürlich erst versuchen, den Temperatureinfluß herauszuschaffen.

Es sei nun τ der Temperaturkoeffizient; er gibt an, wieviel Sekunden Uhrvariation durch 1 Grad Temperaturvariation verursacht werden. Diese Temperaturvariation, allgemein bezeichnet mit t_v, wobei v die zugehörige Uhrvariation bedeutet, ist in dem früher erwähnten Sinne zu verstehen als Differenz der Temperaturmittel zwischen den einzelnen Tagen. Bezeichnet man noch mit v_0 den von der Temperatur unbeeinflußten Teil von v, so bestehen die Gleichungen:

$$a = a_0 + \tau \cdot t_a$$
$$b = b_0 + \tau \cdot t_b$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

allgemein

(3) $$v = v_0 + \tau \cdot t_v.$$

Vorausgesetzt nun, daß τ bekannt wäre, so könnte man zu den v_0 gelangen, indem man diese Gleichung für jeden Tag ausrechnet. Da die Werte von t nur zwischen -16 und $+20$ Zehntelgrad schwanken, so wäre das mit Hilfe geeigneter Tabellen nicht schwierig gewesen. Aber ganz abgesehen davon, daß es dann nötig gewesen wäre, die Zählkarten neu zu stempeln, hat dieses Verfahren noch einen Nachteil im Gefolge. Man hätte nämlich die Reduktion mit einem ganz bestimmten Werte von τ durchführen müssen, und hinterher wäre dann keine Möglichkeit gewesen, einen Anhalt dafür zu gewinnen, welchen Einfluß die Annahme eines andern Wertes von τ auf die Abhängigkeitszahlen hat.

Diesen Übelstand vermeidet man bei dem Verfahren, das ich angewendet habe. Es ist doch zu beachten, daß es für die weiteren Rechnungen nicht so sehr auf die v_0 selbst, als vielmehr auf die $[a_0, a'_0]$ ankommt. Für diese kann man aber folgende Gleichungen aufstellen:

(4) $$[a_0, a'_0] = [a - \tau \cdot t_a,\ a' - \tau \cdot t_{a'}]$$
$$= [a, a'] - \tau \cdot \{[a, t_{a'}] + [t_a, a']\} + \tau^2 \cdot [t_a, t_{a'}].$$

Kennt man also die Klammergrößen und τ, so kann man die $[a_0, a'_0]$ berechnen, ohne die v_0 selbst zu kennen. Jene lassen sich nun durch Auszählungen finden, bei denen als „Paar" natürlich jedesmal die beiden in einer Klammer stehenden Größen auftreten. Man hat eben hier, um eine Abhängigkeitszahl zu erhalten, statt einer Auszählung deren vier zu machen. Das ist allerdings eine bedeutende Mehrarbeit, man hat aber dafür den Vorteil, für τ verschiedene Werte annehmen zu können. Freilich soll nicht verschwiegen werden, daß auch dieses Verfahren eine Schattenseite aufweist: man kann keine sporadischen Fälle ausscheiden, weil man sie nicht sicher erkennen kann. Um das einzusehen, muß man sich gegenwärtig halten, was alles in einer solchen Uhrvariation enthalten ist: das ist der Einfluß der Temperaturvariation — die ihrerseits wieder stark von der vorhergehenden abhängt, wie die beträchtlichen Werte von $[t_a, t_{a'}]$ beweisen — und außerdem noch die Abhängigkeit vom vorhergehenden Tag. Nun kann man bei den Temperaturvariationen kaum von sporadischen Fällen sprechen, nach dem ganzen Aussehen der Verteilungstafel, wenngleich die Außenwerte um ein Geringes über das 3.5fache der Streuung hinausgehen. Wirken aber dann die eben erwähnten drei Einflüsse, zu denen sich noch die zufällige Störung gesellt, alle im gleichen Sinne, dann wird die Uhrvariation gar leicht jenseits der üblichen Toleranz liegen, ohne daß man deswegen von einem sporadischen Fall reden kann. Zufolge dieser Erwägung habe ich also hier die Ausscheidung unterlassen.

§ 13. Nunmehr ist noch der Wert von τ zu bestimmen. Es bieten sich wieder zwei Wege: entweder man benutzt sämtliche Beobachtungen und bildet einen Mittelwert, oder man benutzt die wenigen, aber sehr hohen Werte, die durch Übergang der Uhren in den Heizschrank hervorgerufen wurden. Beide Wege habe ich eingeschlagen, um die Ergebnisse miteinander vergleichen zu können, und will sie im folgenden kurz schildern.

§ 14. Im ersten Fall geht man aus von der Gleichung

$$v = \tau \cdot t. \tag{5}$$

Man wird mir einwerfen, daß diese im Widerspruch stehe zu der Gleichung (4), wo noch v_0 hinzutritt. Doch muß man bedenken, daß man ja dann die Summen bildet, um zu dem Mittel zu gelangen. Dabei fällt aber v_0 heraus; denn Σv_0 wird angenähert null sein, wenn die Verteilung ungefähr symmetrisch zur Nulllinie ist. Vorsichtshalber habe ich jedoch den Ansatz mit v_0 einmal durchgerechnet. Das Ergebnis entsprach den Erwartungen: praktisch war dann im Mittel v_0 gleich null zu setzen.

Das ganze Material wurde nach Temperaturen geordnet und dann in 7 Gruppen mit durchschnittlich 41 Argumenten Umfang zerlegt. Innerhalb jeder Gruppe wurden die arithmetischen Mittel gebildet sowohl für die Variationen der Uhren wie für die Temperaturvariationen. Auch hier war das gleichmäßige Verhalten der drei Uhren unter sich festzustellen. Nun ist aus der mittelsten Gruppe, die alle Argumente mit der Temperatur 0 enthält, offenbar kein Wert für τ zu erhalten; diese wurde also nicht weiter benutzt. Auch den beiden benachbarten Gruppen mit geringer Temperaturvariation (-1.6 und $+1.7$) kommt nur untergeordnete Bedeutung für die Bestimmung von τ zu. Daher wurden die arithmetischen Mittel der Gruppen nochmals mit den zugehörigen t multipliziert, dann die Summen gebildet, und nunmehr τ bestimmt aus der Gleichung

(6) $$\tau = \Sigma(v \cdot t) : \Sigma t^2.$$

Dabei ergaben sich für die drei Uhren die Werte

$$\tau = 11.1;\ 11.6;\ 11.4.$$

Mit diesen Werten wurden für die einzelnen Gruppen die $v = \tau \cdot t$ berechnet und dann die Widersprüche „Beobachtung minus Rechnung" gebildet. Hieraus wird dann der mittlere Widerspruch gefunden mit der bekannten Formel

$$M = \sqrt{\Sigma w^2} : \sqrt{b - u},$$

wenn b die Anzahl der benutzten Gleichungen und u die der daraus bestimmten Unbekannten ist.. Es ergaben sich dafür

$$M = 6.0;\ 5.8;\ 5.9.$$

Dabei hat aber die Gruppe mit $t = + 1.7$ einen erheblichen Einfluß. Würde man sie einmal unberücksichtigt lassen, so würden die M auf 3.8, 4.0, 3.9 sinken. Zur richtigen Beurteilung dieser Zahlen muß man sich vergegenwärtigen, daß sie für die arithmetischen Mittel gelten, die aus den Gruppen von 41 Argumenten Umfang erhalten worden sind.

§ 15. Eine zweite Bestimmung von τ erfolgte aus den hohen Variationen, die der Übergang in den Heizschrank mit sich brachte. Hier kann man ohne weiteres die Gleichung $v = \tau \cdot t$ als gültig betrachten, da t zwischen 10^0 und 35^0 liegt und da $\tau \cdot t$ auf jeden Fall gewaltig überwiegt und einen solchen Wert besitzt, daß ein Beitrag von der Größenordnung des v_0 überhaupt nicht in Betracht kommt.

Der Gang der Rechnung ist ganz der gleiche wie bei den Gruppenmitteln. Es standen insgesamt 13 Variationen zur Verfügung. Aus diesen ergab sich

$$\tau = 10.8;\ 11.6;\ 11.6.$$

Das ist eine gute Übereinstimmung mit den vorhin gefundenen Werten, allein der mittlere Widerspruch ist ziemlich groß, nämlich

$$M = 10.9;\ 15.4;\ 15.2.$$

Eine nähere Betrachtung zeigt, daß die Ursache davon wesentlich in fünf Widersprüchen zu suchen ist, die den andern gegenüber auffällig groß sind. Deren drei gehören zu den höchsten vorkommenden Temperaturvariationen (die über 25^0 liegen, während die andern 10 alle unter 17^0 liegen). Man konnte daher vermuten, daß der Temperaturkoeffizient nicht konstant ist. Nun ist schon anderwärts festgestellt worden, daß der Temperaturfehler tatsächlich keine lineare Funktion der Temperatur ist, und daß die sog. Kompensation streng nur für eine bestimmte Temperatur gilt. Bei der Annahme eines veränderlichen τ ist es dann leicht erklärlich, daß die außergewöhnlich großen

Temperaturvariationen mit den andern nicht zusammenpassen. Demzufolge habe ich versuchsweise die 3 höchsten Variationen — die entsprechenden Temperaturvariationen sind 25.1^0, 30.1^0, 34.7^0 — und die andern getrennt behandelt. Es ergaben sich da folgende Werte: für die höchsten Variationen

$$\tau = 10.5;\ 11.2;\ 11.2,$$

für die übrigen

$$\tau = 11.1;\ 12.3;\ 12.3.$$

Dadurch wurde auch der mittlere Widerspruch entsprechend herabgedrückt. Die entsprechenden Werte waren

$$M = 9.0;\ 6.2;\ 3.8$$

und

$$M = 9.2;\ 11.4;\ 12.2.$$

Dieses Ergebnis scheint die oben ausgesprochene Vermutung von der Veränderlichkeit des τ zu bestätigen; doch ist die Anzahl der benutzten Variationen zu gering, um sichere Schlüsse zu ziehen. Das eine scheint mir aber mit Bestimmtheit aus all den Werten von τ hervorzugehen, weil es überall wiederkehrt: die Uhren $A2$ und $A3$ haben gleichen Temperaturkoeffizienten, während der von $A1$ etwas geringer ist. Vielleicht hängt das mit der S. 11 erwähnten Tatsache zusammen, daß diese Uhr auch bei kompensierter Unruhe einen etwas anderen Gang zeigt als $A2$ und $A3$.

Nun erhebt sich natürlich die Frage: welche von allen diesen Werten von τ soll man benutzen? Die Entscheidung ist zunächst noch nicht von besonderer Wichtigkeit, weil wir uns ja durch die Wahl der Methode den Vorteil gesichert haben, daß wir ohne große Mühe den Ansatz mit verschiedenen Werten von τ durchrechnen können. Erst in dem Fall, daß die Ergebnisse wesentlich verschieden ausfallen, muß man schlüssig werden, welchen Werten man den Vorzug geben will. Ich habe daher zunächst diejenigen gewählt, die mit den zu reduzierenden Variationen unmittelbar zusammenhängen, also die auf dem ersten Wege gewonnenen: $\tau = 11.1$; 11.6; 11.4.

§ 16. Damit ist man dann soweit, daß es an die Berechnung von $[a_0, a_0']$ nach der Formel (4) gehen kann. Man darf aber dabei eins nicht vergessen, daß nämlich die bei den Auszählungen benutzten a und a' Nummernargumente sind, die durch Zusammenlegung der Beobachtungswerte zu je 13 entstanden sind. Darauf brauchte man früher, bei LA — wo zu je 7 zusammengelegt wurde — nicht weiter zu achten; denn dieser Faktor fällt wieder heraus, wenn man die $[a, a']$ durch $\operatorname{str} a^2$ dividiert.

Hier aber ist der Hinweis nötig; denn eine Anwendung von τ ist natürlich nur dann möglich, wenn Uhr- und Temperaturvariationen in den zusammengehörigen Einheiten — hier Zehntelsekunde und Zehntelgrad — ausgedrückt sind. Somit erfährt also die Formel zur Berechnung der $[a_0, a_0']$ noch eine kleine Abänderung und nimmt schließlich folgende Gestalt an:

$$\text{(4a)}\quad [a_0, a_0'] = h^2 [a, a'] - h \cdot \tau \{[a, t_{a'}] + [a', t_a]\} + \tau^2 [t_a, t_{a'}],$$

wobei h der Zusammenlegungsfaktor ist. Jedoch — auch diese Zahlen bedürfen noch der Reduktion auf gleiche Streuung, wenn man sie vergleichbar machen will. Es ist vorauszusehen, daß der anzuwendende Divisor auch wieder etwas kompliziert ausfallen wird. Statt des Wertes $\operatorname{str} a_0^2$, der theoretisch genügen müßte, nimmt man

$$\{\operatorname{str}(a_0 + a_0')^2 + \operatorname{str}(a_0 - a_0')^2\} : 4,$$

um der Verschiedenheit von $\operatorname{str} a_0^2$ und $\operatorname{str} a_0'^2$ Rechnung zu tragen. Anderseits hat man $\operatorname{str}(a_0 \pm a_0')^2$ ja auch nicht, sondern muß es aus bekannten Werten folgendermaßen zusammensetzen:

$$\operatorname{str}(a_0 \pm a_0')^2 = \operatorname{str}(a \pm a')^2 - 2\tau\{[a, t_a] \pm [a, t_{a'}] \pm [a', t_a] + [a', t_{a'}]\} + \tau^2 \cdot \operatorname{str}(t_a \pm t_{a'})^2.$$

Beachtet man, daß $[a, t_a]$ mit großer Annäherung gleich $[a', t_{a'}]$ gesetzt werden kann und fügt wieder den Zusammenlegungsfaktor h ein, so erhält man schließlich für den Zähler des Divisors

$$\mathrm{str}\,(a_0 + a_0')^2 + \mathrm{str}\,(a_0 - a_0')^2 = h^2 \cdot \{\mathrm{str}\,(a + a')^2 + \mathrm{str}\,(a - a')^2\}$$
$$- h \cdot 2\tau \cdot 4\,[a, t_a] + \tau^2 \{\mathrm{str}\,(t_a + t_{a'})^2 + \mathrm{str}\,(t_a - t_{a'})^2\}.$$

§ 17. Somit ist das Formelwerk gegeben, um auch für die nicht kompensierten Uhren die Werte der Abhängigkeitszahl q_0 zu berechnen. Man sieht wohl schon aus den wesentlich komplizierteren Formeln, daß hier für jede Zahl bedeutend mehr Rechenarbeit erforderlich ist als früher. Daher wurde hier bei den $A\ nk$ nur bis zur vierten Variation gegangen.

Von besonderem Interesse ist es nun, wie sich die Abhängigkeitszahlen verhalten bei einer Änderung von τ. Ich habe also die Rechnung, nachdem sie zuerst mit den oben genannten Werten ausgeführt worden war, wiederholt unter Annahme von $\tau = 11.0$ für alle drei Uhren. Die Abweichungen waren minimal und machten sich erst in der dritten Dezimale bemerkbar. Auch die Annahme von 10.0 und 12.0 ergab nur einen Unterschied von höchstens 24 Einheiten der dritten Dezimale, d. h. also Beträgen, die im Vergleich zur Unsicherheit der Rechnung kaum in Betracht kommen. Dieser Umstand veranlaßte mich, als endgültige Werte von τ die der ersten Rechnung zu benutzen, da sie doch zu den behandelten Beobachtungswerten in nächster Beziehung stehen.

Hier seien noch zwei Angaben über Temperaturkoeffizienten eingefügt, die man in der Literatur findet. C. E. Caspari gibt in der „Theorie der Uhren" (Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften, VI, 2, 4) an, daß bei gewöhnlichen Unruhen die Uhren bei 1^0 Temperaturerhöhung 11^s nachgehen.

Die zweite Bemerkung findet sich im Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde von Ambronn, I. Band, II. Abschnitt, 3b, S. 252. Für eine Messingunruhe wird der Temperaturkoeffizient mit 10.5 angegeben. Dann sind noch zwei Tabellen angegeben, die ich hier anführen will, weil sie gleichzeitig die Veränderlichkeit des Temperaturkoeffizienten zeigen. Es handelt sich um zwei Taschenuhren, die auf der deutschen Seewarte als Temperaturintegratoren benutzt werden. Die Prüfung 1894/95 hat folgendes ergeben:

Zwischen	bewirkt eine Temperaturerhöhung um 1° ein Nachgehen um	
30° 25°	12.42^s	10.40^s
25° 20°	11.14^s	11.04^s
20° 15°	11.20^s	10.24^s
15° 10°	10.84^s	11.24^s
10° 5°	12.20^s	10.22^s
	(Tiede 108)	(Eppner 20)

Man sieht, daß hier ganz ähnliche Werte vorliegen wie bei den untersuchten *Ank*-Uhren.

Betrachten wir die Abhängigkeitszahlen der *Ank* näher — sie sind mitgeteilt in Tabelle III —, so wird wiederum die beträchtliche Größe der ersten ins Auge fallen, außerdem die Tatsache, daß die Vorzeichen abwechseln. Im übrigen ist auch hier die Gleichmäßigkeit der Uhren unter sich recht bemerkenswert.

Die Untersuchung der Nachwirkung.

§ 18. Es hat sich gezeigt, daß die Streuungsquadrate der Gangdifferenzen am ehesten geeignet sind, um die Nachwirkung zu beurteilen, weil man leicht ihren mittleren

Fehler bestimmen kann. Ich konnte mich auch hier wieder dem von Thierig angewandten Verfahren anschließen und es mit geringfügigen Änderungen für meine Reihen verwenden. So beschränke ich mich abermals darauf, hier nur die nötigsten Gleichungen und Formeln wiederzugeben, und verweise bezüglich der inneren Zusammenhänge auf § 18f. der genannten Arbeit.

Man geht aus von den Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{gathered} g_2 - g_1 = a, \quad g_3 - g_1 = a + b, \\ g_4 - g_1 = a + b + c, \ \ldots \end{gathered}$$

und gelangt wegen der angenähert geltenden Identitäten

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{str} a^2 = \operatorname{str} b^2 = \operatorname{str} c^2 = \ldots \\ &[a, b] = [b, c] = [c, d] = \ldots \\ &[a, c] = [b, d] = [c, e] = \ldots \text{ usw.} \end{aligned}$$

zu den Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\operatorname{str} (g_2 - g_1)^2 = \operatorname{str} a^2 \\ &\operatorname{str} (g_3 - g_1)^2 = 2 \operatorname{str} a^2 + 2\,[a, b] \\ &\operatorname{str} (g_4 - g_1)^2 = 3 \operatorname{str} a^2 + 4\,[a, b] + 2\,[a, c] \text{ usw.} \end{aligned}$$

Hieraus sieht man, daß man die str $(g_p - g_1)^2$ aus den $2\,[a, a']$ erhalten kann durch Bildung der zweiten Summenreihe, wobei man in der ersten als erstes Glied $\operatorname{str} a^2$ vorzulegen hat. Man benutzt natürlich auch hier wieder die $[a, a']$ reduziert, und zwar habe ich, ein wenig abweichend von Thierig, einfach die q_0 an ihre Stelle gesetzt. Das darf man, wenn man $\operatorname{str} a^2 = 1$ setzt. Und das wieder hat den Vorteil, daß man die Uhren ohne weiteres miteinander vergleichen kann.

Ich möchte darauf hinweisen, daß an dieser Stelle der Unterschied gegen die Behandlungsweise von Gey am deutlichsten hervortritt. Daß die oben angegebenen Identitäten bei Thierig wie bei mir bestehen, ist einfach eine Folge des Umstandes, daß jede Variation einmal als erste, zweite, dritte usw. benutzt wird. Dagegen wäre Gey der Theorie seines Verfahrens nach nicht berechtigt, diese Identitäten und die Folgerungen daraus aufzustellen. Daß sie bei ihm auch in der Ausführung keineswegs vorhanden sind, lehrt ein Blick auf seine Tabellen. Zwar weichen die Streuungen von $a, b, c \ldots$ nicht viel voneinander ab, aber die $[a, b]$, $[b, c]$, $[c, d] \ldots$ einer Gruppe zeigen oft sehr beträchtliche Unterschiede, manchmal sogar verschiedenes Vorzeichen.

§ 19. Bedeuten g_{p-1} und g_p zwei aufeinanderfolgende Gänge, n die Nachwirkungszahl, x_{p-1} die zufällige Störung, so ist nach dem Gesetz der konstanten Nachwirkung

(10) $$g_p = n \cdot g_{p-1} + x_{p-1}.$$

Benutzt man diese Beziehung als Rekursionsformel, so ist

(11) $$g_p = n^{p-1} \cdot g_1 + n^{p-2} \cdot x_1 + n^{p-3} \cdot x_2 + \ldots + n \cdot x_{p-2} + x_{p-1}.$$

Da man
$$\text{str}\, x_1^2 = \text{str}\, x_2^2 = \ldots = \text{str}\, x_{p-1}^2 = X$$

setzen kann, da ferner die Glieder $[g_1, x_i]$ und $[x_i, x_k]$ $(i, k = 1, 2 \ldots, p-1;\ i \neq k)$ verschwinden, so wird mit der Abkürzung $\text{str}\, g_1^2 = G$ nach einigen Umformungen

(12) $$\text{str}\,(g_p - g_1)^2 = (n^{p-1} - 1)^2 \cdot G + X(1 - n^{2p-2}) : (1 - n^2)$$

oder schließlich, da

(13) $$X = G(1 - n^2)$$

gesetzt werden kann:

(12a) $$\text{str}\,(g_p - g_1)^2 = 2\, G(1 - n^{p-1}).$$

$p-1$ ist die Nummer der letzten mitgenommenen Variation. Man erhält also $p-1$ Gleichungen zur Bestimmung von G und n. Die Auflösung erfolgt in der Weise, daß man die Werte von $1 - n^{p-1}$ tabuliert für $n = 0.1, 0.2, \ldots 0.9$ und $2\, G$ berechnet aus

(14) $$\Sigma\, \text{str}\,(g_p - g_1)^2 = 2\, G \cdot \Sigma(1 - n^{p-1}) \quad p = 2, 3 \ldots$$

Jedes Wertepaar $2\,G, n$ liefert nun $p-1$ Gleichungen nach der Beziehung (12a). Man bildet die Widersprüche gegen die aus den Beobachtungen hervorgegangenen Werte und betrachtet dann dasjenige Wertpaar $2\,G, n$ als beste Lösung, für das die Quadratsumme der Widersprüche ein Minimum wird.

Bei der Ausführung dieses Rechenverfahrens wurde noch eine Abänderung angebracht. Um nämlich den einzelnen Gleichungen verschiedenes Gewicht zu geben, das abnimmt wie das Zutrauen, das man zu ihnen haben kann, wurde der Logarithmus eingeführt. Setzt man dann

$$T = \Sigma \operatorname{Log} \operatorname{str} (g_p - g_1)^2,$$
$$M = \Sigma \operatorname{Log} (1 - n^{p-1}),$$

so wird $$\operatorname{Log} 2\,G = (T - M) : (p - 1)$$

und $$\operatorname{Log} \operatorname{str} (g_p - g_1)^2 = \operatorname{Log} 2\,G + \operatorname{Log} (1 - n^{p-1}).$$

§ 20. Während sich Thierig — der ganzen Sachlage nach wohl mit Recht — begnügt, den Ansatz nur mit den Werten $n = 0.1 \ldots 0.9$ durchzurechnen, habe ich für die Bestimmung des besten Wertes noch eine Dezimale hinzugenommen. Auch Gey hat seine Nachwirkungszahlen auf zwei Dezimalen berechnet; doch bin ich etwas anders vorgegangen und will das Verfahren hier kurz beschreiben.

Rechnet man zunächst mit $n = 0.1 \ldots 0.9$, so wird für einen dieser Werte ein „vorläufiges" Minimum von Q, der Quadratsumme der Widersprüche, bestehen. Im allgemeinen wird aber das „wahre" Minimum nicht genau für diesen Punkt vorhanden sein, sondern in der Umgebung, also zwischen den beiden Nachbarwerten. Der zugehörige Wert von n heiße n_0, ausgedrückt in zwei Dezimalen — eine größere Genauigkeit ist nicht möglich. Der entsprechende Wert von Q heiße Q_0 und sei das „endgültige" Minimum genannt.

Bezeichnet man nun das n des vorläufigen Minimums mit n_2, die Nachbarwerte mit n_1 und n_3, und setzt $n_i - n_2 = t_i$, so ist bei dem gewählten Intervall von 0.1 stets

$$(15)\qquad \begin{aligned} t_1 &= n_1 - n_2 = -0.1 \\ t_2 &= n_2 - n_2 = 0 \\ t_3 &= n_3 - n_2 = +0.1. \end{aligned}$$

Für das endgültige Minimum gelte $n_0 - n_2 = t_0$. Die Quadratsumme der Widersprüche kann man als Funktion zweiten Grades schreiben:

$$Q = a + b \cdot t + c \cdot t^2.$$

Man hat also die drei Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{aligned} Q_1 &= a + b \cdot t_1 + c \cdot t_1^2 \\ Q_2 &= a + b \cdot t_2 + c \cdot t_2^2 \\ Q_3 &= a + b \cdot t_3 + c \cdot t_3^2, \end{aligned}$$

aus denen sich a, b, c berechnen läßt.

Für das Minimum ist, wenn man differenziert:

$$0 = b + 2c \cdot t_0,$$

woraus

$$(17)\qquad t_0 = -b : 2c$$

folgt. Daraus ist dann

$$(16\,a)\qquad Q_0 = a + b \cdot t_0 + c \cdot t_0^2$$

zu finden. Mit der Einführung von t_1, t_2, t_3 durch (15) gestalten sich nun die Gleichungen (16) höcht einfach; es wird

$$(16\,b)\qquad \begin{aligned} Q_1 &= a - 0.1\,b + 0.01\,c \\ Q_2 &= a \\ Q_3 &= a + 0.1\,b + 0.01\,c. \end{aligned}$$

Daraus läßt sich a, b und c mit großer Leichtigkeit bestimmen, dann t_0 und Q_0 aus (17) und (16a).

Mit den endgültigen Werten $n_0 = n_2 + t_0$ wird dann die Rechnung für die str $(g_p - g_1)^2$ wiederholt und nochmals Q_0 gebildet, was eine nicht genaue, aber doch ungefähre Kontrolle bietet.

§ 21. Bei den *Ank* trat nun etwas Merkwürdiges ein, wie ja gerade die Erwartung eines solchen abweichenden Verhaltens der Anlaß der ganzen Untersuchung gewesen ist. Σw^2 war am größten für $n = 0.9$, nahm für alle niedrigeren Werte von n ab und war schließlich für $n = 0$ noch kleiner als für $n = 0.1$. Das führte von selbst darauf, für n auch negative Werte anzunehmen und wirklich stellte sich das Minimum Q_0 für einen solchen ein. Es ergaben sich für die drei Uhren

$$n = -0.44; \quad -0.50; \quad -0.22.$$

Allerdings zeigt auch der Verlauf der $\mathrm{str}\,(g_p - g_1)^2$ ein anderes Verhalten als bei den andern Uhren. Denn während sie sonst mit wachsendem p nach einer oberen Grenze zu ansteigen, ist hier das Entgegengesetzte der Fall: sie werden kleiner. Was das zu bedeuten hat und ob das eine grundsätzliche Verschiedenheit gegenüber den andern Uhren ist, darauf will ich erst später eingehen. Nur das eine sei gegesagt, daß natürlich unter diesen Umständen von einer Ähnlichkeit zwischen den Nachwirkungszahlen von „kompensiert“ und „nicht kompensiert“ keine Rede sein kann. Man müßte denn gerade darin eine Beziehung suchen, daß die absolute Größe zweier entsprechender Nachwirkungszahlen ungefähr dieselbe ist, jedenfalls insoweit dieselbe, als sie für *A* 2 am größten, für *A* 3 am kleinsten ist, während *A* 1 beide Male in der Mitte steht.

Das Ergebnis.

§ 22. Tabelle IV enthält alle für das Ergebnis der Arbeit wesentlichen Zahlen. Ehe ich aber auf ihre Deutung eingehe, seien noch einige Worte zu den Überschriften der Zeilen und Spalten gesagt. Die der Zeilen sind die früher bereits eingeführten Abkürzungen der Uhren. Nur bei den

L-Uhren ist noch eine Erklärung nötig. Die in Klammern beigefügte 5 oder 7 soll anzeigen, wieviel Variationen benutzt worden sind. Es waren zunächst 7; da ich aber bei den $A\,k$-Uhren nur 5 heranzog, ebenso wie bei Gey nur 5 auftreten, so habe ich des Vergleichs wegen auch für die L-Uhren die Rechnung nochmals mit 5 Variationen durchgeführt.

In den Spaltenüberschriften bedeutet m den Umfang, n und G das Wertepaar für das endgültige Minimum von Σw^2, mit anderen Worten: die beste Lösung. M ist der mittlere Widerspruch einer Gleichung nach der bereits angeführten Formel $M = \sqrt{\Sigma w^2} : \sqrt{b - u}$, wenn b die Anzahl der benutzten Gleichungen und u die Anzahl der Unbekannten ist. F ist die Streuung des Streuungsquadrates von a, hier gegeben durch die einfache Formel $F = \sqrt{2 : m}$. str g_1 ist nicht die Wurzel aus G, wie man nach der auf S. 30 eingeführten Abkürzung wohl vermuten könnte. Aber was dort str $g_1{}^2$ genannt ist, ist schon durch Division mit str a^2 reduziert und str a^2 wiederum gilt nur für das Nummernargument. Das hier mitgeteilte str g_1 steht also zu G in folgender Beziehung

$$\text{str}\ g_1^2 = h^2 \cdot \text{str}\ a^2 \cdot G,$$

wobei wieder h der Zusammenlegungsfaktor ist. Das hierin auftretende $h^2 \cdot$ str a^2 habe ich der Übersichtlichkeit wegen auch noch mitgeteilt, und zwar gilt dabei die Zehntelsekunde als Einheit. Dagegen ist str g_1 und str x in Sekunden ausgedrückt, wie das beigeschriebene ^{s} zeigt. str x ist aus str g_1 berechnet mit Hilfe der Formel (13), sodaß

$$\text{str}\ x = \text{str}\ g_1 \cdot \sqrt{1 - n^2} \quad \text{ist.}$$

Die ganze Tabelle ist so angelegt, daß sie leicht mit Tab. XXIV bei Gey verglichen werden kann.

§ 23. Betrachten wir nun einmal die Zahlen für die Lange-Uhren näher, so finden wir folgendes. Die Übereinstimmung der n für „gerade" und „ungerade" derselben Uhr ist nicht besonders gut zu nennen. Das werden wir bei diesen Uhren dahin deuten, daß das Material nicht ganz homogen ist. Freilich ist das angesichts der großen Streuung von a — namentlich bei LA — auch nicht zu erwarten. Und es macht keinen Unterschied, ob man 7 oder 5 Variationen benutzt, die Verschiedenheiten von n für g und u bleiben in gleicher Weise bestehen. Auffällig ist es, daß für 7 Variationen das n durchgängig größer ist als für 5 Variationen, aber freilich ist da anderseits zu beachten, daß auch M, der mittlere Widerspruch einer Gleichung, erheblich größer ist, etwa das Doppelte von F, während bei 5 Variationen M und F ungefähr gleich sind. Gerade wegen dieses Umstandes möchte ich den Hauptwert auf L (5) legen. Es scheint mir überhaupt, als wäre es nicht recht angebracht, mehr als 5 Variationen mitzunehmen. Wenn Thierig sogar 9 benutzt hat, so kann man das ja damit begründen, daß die Pendeluhr ein feineres Instrument als die Taschenuhr ist. Aber ich weiß nicht, ob er nicht doch vielleicht gut daran getan hätte, wenigstens versuchsweise einmal weniger Variationen zu benutzen.

Nimmt man einmal das Mittel der n von g und u, so ergibt sich für LA $n = 0.79$, für LB $n = 0.68$. Hält man die Nachwirkungszahlen der Ak-Uhren dagegen mit $n = 0.42 : 0.48; 0.39$, so ist man vielleicht zunächst erstaunt, daß die am wenigsten „gut" gehende Uhr — in dem eingangs erwähnten Sinne — die größte Nachwirkungszahl hat, und umgekehrt die „beste" die kleinste. Doch ein Blick auf die Spalten str g_1 und str x lehrt, wie man sich das wohl zu erklären hat. Es ist nämlich bei LA str x zwar auf str g_1 bezogen kleiner als bei den Ak, aber absolut ist sie um ein Vielfaches größer als bei diesen. Für LB ist str x ungefähr gleich wie bei $A1$, aber größer als bei $A2$ und $A3$, relativ zu str g_1 aber auch wieder kleiner als bei diesen.

Mit andern Worten heißt das: je feiner die Reglage wird, desto mehr schaltet sie die Beeinflussung eines Ganges durch die vorhergehenden aus; doch ist sie nicht imstande, die zufälligen Störungen in gleich hohem Maße herabzudrücken.

Dieses Ergebnis hat sicherlich eine gewisse Bedeutung für die Uhrenprüfung. Man sieht nämlich daraus, daß die Reglage über kurz oder lang eine Grenze erreichen wird, über die sie nicht hinauskann. Wenn es gelingen sollte, die Gänge völlig unabhängig voneinander zu machen, so würde diese Grenze bestimmt werden durch die Größe der zufälligen Störungen, die sich nie ganz beseitigen lassen werden. Wenn also im Jahre 1911 die Prüfungsbestimmungen dahin verschärft worden sind, daß innerhalb einer Lage für die Variation nur noch 2^s — statt früher 4^s — zugelassen werden, so fragt es sich, ob man einstmals dazu kommen wird, die Grenze noch weiter herabzusetzen. Freilich muß man sich auch vor Augen halten, daß dieses Ergebnis aus der Beobachtung von nur fünf Uhren entsprungen ist. Es bleibt abzuwarten, ob es sich bei späteren und vielleicht noch umfassenderen Beobachtungen bestätigt. Zudem ist zu beachten, daß die Annahme einer konstanten Nachwirkung von Anfang an nur eine „Arbeitshypothese“ ist, und wir werden gleich nachher sehen, daß die Streuungsquadrate der Gangdifferenzen auch noch von andern Gesichtspunkten aus betrachtet werden können.

§ 24. Ich wende mich nunmehr zu den *Ank.* Bereits oben betonte ich, daß hier merkwürdigerweise n negative Werte annimmt. Merkwürdig ist das weniger vom rechnerischen Standpunkte aus als vielmehr vom physikalischen. Denn was bedeutet denn eine negative Nachwirkung? Doch nichts anderes, als daß ein Gang am nächsten Tage in sein Gegenteil umschlägt, daß die Uhr abwechselnd vor- und nachgeht. In der Tat höchst sonderbar! Denn eine Uhr ist doch kein Organismus, der heute einen Anlauf nimmt und morgen unter Ermüdungserscheinungen abfällt. Oder soll man eine selbsttätige Regulierung annehmen, etwa wie bei einem Gasmotor, wo durch eine übermäßige Umdrehungsgeschwindigkeit der Regulator betätigt wird, der dann die Gaszufuhr so lange absperrt, bis die Geschwindigkeit wieder normal ist? Jedenfalls wird man wohl einsehen, daß das physikalisch keine Nachwirkung mehr im ursprünglichen Sinne ist. Es scheint also eine grundsätzliche Verschiedenheit gegenüber dem Verhalten der anderen Uhren vorzuliegen.

Anders stellt sich aber die Sache dar, wenn man darauf zurückgeht, wie man die Streuungsquadrate erhalten hat, aus denen man die Nachwirkungszahl ableitet. Es ist in § 18 auseinandergesetzt worden, daß man zu diesem Zwecke die zweite Summenreihe der $2q_0$ bildet. Betrachten wir uns also einmal die ersten q_0 der verschiedenen Uhren! Man wird nichts Auffälliges entdecken können. Sie sind durchweg negativ, bei den *L*-Uhren ziemlich klein, bei den *A k* größer, bei den *A nk* am größten. Ziehen wir noch die Thierigschen Zahlen hinzu, so ordnen sich diese durchaus gut ein, die meisten schwanken um -0.5, bald etwas größer, bald etwas kleiner. Sowie man aber mit der Bildung der Summenreihen beginnt, merkt man, wo der springende Punkt ist. Wenn nämlich q_0 absolut größer als 0.5 ist, also $|2q_0| > 1$, so wird das zweite Glied der ersten Summenreihe negativ — das erste ist ja stets $\operatorname{str} a^2 = 1$. Damit wird dann $\operatorname{str}(g_3 - g_1)^2$ kleiner als $\operatorname{str}(g_2 - g_1)^2$ und das ist die erste Vorbedingung dafür, daß *n* negativ wird! Nun erhebt sich die Frage: soll wirklich der Umstand, daß das erste q_0 etwas größer oder kleiner als -0.5 ist, dafür maßgebend sein, ob die Uhr eine positive oder die grundsätzlich davon verschiedene negative Nachwirkungszahl hat? Das wäre doch schwer verständlich. Folgende Überlegung sei dazu noch angestellt. Wir nehmen einmal an, wir hätten vier aufeinanderfolgende Gänge, in denen keine zufälligen Störungen auftreten. Der erste Gang beeinflusse die folgenden nach dem Gesetz der konstanten Nachwirkung, die Nachwirkungszahl sei n. Bilden wir dann die Differenzen, so erhalten wir die Variationen und können die Abhängigkeitszahlen einfach durch Division erhalten, da Störungen ausgeschaltet sind. Es ergibt sich da folgendes Schema

$$
(18) \qquad \begin{array}{l} g_1 = g_1 \\ g_2 = n \cdot g_1 \\ g_3 = n^2 \cdot g_1 \\ g_4 = n^3 \cdot g_1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a = g\,(n - 1) \\ b = g \cdot n\,(n - 1) = a \cdot n \\ c = g \cdot n^2 (n - 1) = a \cdot n^2 . \end{array}
$$

Führen wir die Division aus, so erhalten wir die Abhängigkeitszahl für das Variationspaar a, b gleich der Nachwirkungszahl n, allgemein für die erste und $p$te Variation $q_0 = n^{p-1}$. Das überrascht angesichts der Tatsache, daß bei allen früher beobachteten Uhren — bei Gey und bei den L- und Ak-Uhren — n ziemlich stark positiv, dagegen das erste q_0 durchweg negativ war. Man wird diesen Unterschied eben in seiner ganzen Größe dem Einflusse der zufälligen Störungen zuschieben müssen. Gerade deswegen erscheint es mir nicht recht glaubhaft, daß aus einem etwas größeren Werte von q_0 folgen soll, daß bei der Uhr die Einwirkung der Gänge nach einem — physikalisch genommen — völlig veränderten Grundsatze vor sich geht. Ich lasse es dahingestellt, ob man aus dem Ergebnis der Rechnung den Schluß ziehen darf, daß es eine Nachwirkung im negativen Sinne gibt. Aber es wäre ja möglich, daß dies durch weitere Beobachtungen bestätigt wird und vielleicht gelingt auch eine Erklärung aus dem Mechanismus der Uhr heraus. Insbesondere wird man dabei die verschiedene Konstruktion der Reifen der Unruhe beachten müssen. Während nämlich die *Ank* einen geschlossenen Stahlreifen besitzen, haben wir bei den *Ak* zwei einseitig befestigte Streifen aus aneinandergelötetem Stahl und Messing. Dem Vorteil der dadurch gewährleisteten Wärmekompensation steht aber eine beträchtliche Minderung der Stabilität gegenüber, da die Möglichkeit vorliegt, daß die von den Temperaturänderungen herrührenden Verbiegungen der Messingreifen über die Elastizitätsgrenze des Messings hinausgehen. Doch liegt es wohl auf der Hand, daß es recht schwierig sein dürfte, den Einfluß dieser Tatsachen richtig abzuschätzen und in Rechnung zu stellen. In dieser Beziehung könnten erst weitere eingehende Versuche die Entscheidung liefern.

§ 25. Im folgenden soll noch über Versuche berichtet werden, die ich angestellt habe, um die „Unstimmigkeiten" zu beseitigen, die bei der Hypothese der konstanten Nachwirkung aufgetreten sind. Ich rechne darunter folgendes: zunächst den Mißerfolg bei den Pendeluhren; dann die Zweifel, die bei den eben behandelten Ank-Uhren aufgetaucht sind, schließlich aber auch Widersprüche, die bei den Ak-Uhren auftreten. Gewiß, diese Widersprüche sind nicht so groß, daß sie das Gesetz der konstanten Nachwirkung nicht annehmbar erscheinen ließen — ich hätte ja dann das Ergebnis gar nicht in der gewählten Form mitteilen können. Aber wenn man die graphischen Darstellungen betrachtet, die Kurve der beobachteten str $(g_p - g_1)^2$ mit der der berechneten vergleicht, dann fällt einem doch etwas auf, namentlich bei $A1$ und $A2$. Während nämlich die berechnete Kurve parabelähnlich gekrümmt der x-Achse die hohle Seite zukehrt, ist die beobachtete Kurve, besonders im Anfang, erhaben zur x-Achse. Es ist vielfach ein Knick vorhanden, der dadurch entsteht, daß str $(g_3 - g_1)^2$ nur wenig größer ist als str $(g_2 - g_1)^2$, dagegen str $(g_4 - g_1)^2$ bedeutend größer.

Nun kann man bei den Kurven für die Ank etwas ganz Ähnliches wahrnehmen. Hier liegt die Sache ja ein wenig anders insofern, als str $(g_3 - g_1)^2$ wesentlich kleiner ist als str $(g_2 - g_1)^2$; der Knick kommt dann dadurch zustande, daß str $(g_4 - g_1)^2$ wieder größer ist. Dagegen wird str $(g_5 - g_1)^2$ wieder kleiner, sodaß eine richtige Zickzacklinie entsteht, die unterhalb der x-Achse liegt.

Schließlich habe ich noch die Thierigschen Zahlen herangezogen, allerdings nur für die Uhrpaare (T, D), (D, F), (T, F), da die drei andern, die die Uhr E enthalten, doch eine merkliche, ja auch von Thierig hervorgehobene Verschiedenheit von diesen zeigen. Ich habe zunächst aus den dort mitgeteilten q_n die Jahresmittel gebildet und bin dann in derselben Weise wie bei mir zu den str $(g_p - g_1)^2$ übergegangen. Die graphische Darstellung zeigt wiederum den genannten Knick für str $(g_3 - g_1)^2$ in sehr deutlicher Weise.

An dieser mehrfach festgestellten Tatsache kann man meiner Ansicht nach nicht achtlos vorübergehen. Der Anschluß, den die mit der konstanten Nachwirkung berechnete Kurve gibt, ist wirklich nicht als gut zu bezeichnen, wenn auch die Widersprüche in annehmbaren Grenzen bleiben. Während z. B. die beobachtete Kurve für $A\,1\,k$ bez. $A\,2\,k$ von str $(g_2 - g_1)^2$ bis str $(g_3 - g_1)^2$ um 0.04 bez. 0.12 steigt, steigt die berechnete um 0.36 bez. 0.41! Und wenn man sich nach der Beschreibung von Thierig ein Bild von dem Unterschied der beobachteten von der berechneten Kurve macht, so zeigen sich dieselben Erscheinungen. Es heißt da (a. a. O. S. 26): „Zunächst ist durchgängig der Widerspruch der ersten Gleichung — die Differenz im Sinne Beobachtung minus Rechnung genommen — stark positiv. Ferner sinken die Widersprüche der folgenden Gleichungen mehr oder minder rasch ins Negative, um sich dann wieder zu Werten zu erheben, die um null herum schwanken oder entschieden positiv werden.“ Da man weiß, daß die berechnete Kurve parabelähnlich hohl zur x-Achse ist, so kann man sich leicht vorstellen, daß die beobachtete Kurve auch hier wieder erhaben zur x-Achse verläuft, wenigstens im Anfange.

§ 26. Geht man nun wiederum auf die Abhängigkeitszahlen q_0 zurück, so erkennt man, worin zahlenmäßig die Ursache jenes Knickes liegt, nämlich in dem Umstande, daß das erste q_0 nahe an -0.5 herankommt, während das zweite mehr oder weniger stark positiv wird. Da das dritte q_0 bei den meisten Uhren wieder negativ wird, und da die absolute Größe stark abnimmt, so liegt der Gedanke nahe, daß man es hier mit den Potenzen eines negativen Bruches, der ersten Abhängigkeitszahl zu tun hat. Das gewinnt noch an Wahrscheinlichkeit, wenn man sich folgendes klar macht. Die drei oben genannten q_0 sind doch nichts anderes als die reduzierten $[a, b]$, $[a, c]$, $[a, d]$. Nun bestehen bekanntlich die Gleichungen

$$b = [a, b]_{\text{red.}} \cdot a + z_1,$$
$$c = [a, c]_{\text{red.}} \cdot a + z_2.$$

Da aber b und c hier in den langen Reihen dieselbe Stelle einnehmen wie a und b, so besteht auch die Gleichung

$$c = [a, b]_{\text{red.}} \cdot b + z_2'$$

und damit auch

$$c = [a, b]^2 \cdot a + [a, b] \cdot z_1 + z_2'.$$

Die Abhängigkeit des c von a ist also ausgedrückt durch das Quadrat der Abhängigkeitszahl $[a, b]$; demnach müßte $[a, c] = [a, b]^2$ sein. Dasselbe läßt sich für die weiteren Variationen mit den höheren Potenzen ausführen.

Besieht man sich nun die beobachteten Abhängigkeitszahlen der einzelnen Uhren näher, so zeigt sich allerdings, daß sie an absoluter Größe rascher abnehmen, als die Potenzen der ersten von ihnen. Aber mit den Vorzeichen stimmt es, wie erwähnt, oft recht gut. Mit Beachtung dieser Erscheinung habe ich nun mehrfach Ansätze gemacht, um zu den Streuungsquadraten zu gelangen. Doch ließen sie sich nicht durchführen: die Ausdrücke für die Streuungsquadrate wurden zu kompliziert, sowie verschiedene Potenzen von q_0 und mehrere Zufälligkeiten zu berücksichtigen waren.

Noch verschiedenes habe ich versucht, u. a. auch die Hypothese, daß die Nachwirkungszahl nicht konstant bleibt, sondern sich bei den Gängen mit höherer Nummer ändert. Doch ist es mir nicht gelungen, für die Rechnung brauchbare Gleichungen aufzustellen. Ferner könnte man sich auch vornehmen, die Frage der Abhängigkeit eines Ganges von den beiden vorhergehenden zu untersuchen.

§ 27. Schließlich habe ich die Sache einmal von der andern Seite her angefaßt: ich habe die Streuungsquadrate als reine Rechengrößen betrachtet, ohne auf ihre physikalische Bedeutung zu achten, und habe versucht, arithmetisch ein Gesetz aufzustellen, dem sie sich unterordnen lassen. Zu diesem Zwecke nahm ich wieder die graphischen Darstellungen der beobachteten Streuungsquadrate zur Hand und versuchte sie in zwei Kurven zu zerlegen. Das führte dann zum Ziele und zu folgender Darstellung:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{str}\,(g_2 - g_1)^2 = 1 \\
&\mathrm{str}\,(g_3 - g_1)^2 = 1 + B + C \\
&\mathrm{str}\,(g_4 - g_1)^2 = 1 + B + B^2 + 2\,C \\
&\mathrm{str}\,(g_5 - g_1)^2 = 1 + B + B^2 + B^3 + 3\,C \\
&\mathrm{str}\,(g_6 - g_1)^2 = 1 + B + B^2 + B^3 + B^4 + 4\,C
\end{aligned}
\tag{19}
$$

allgemein also

$$
\mathrm{str}\,(g_p - g_1)^2 = 1 + B + B^2 + \ldots + B^{p-2} + (p-2)\cdot C. \tag{19a}
$$

Man erkennt leicht, wie die beiden Kurven beschaffen sind, deren Ordinaten zueinander addiert die Streuungsquadrate ergeben sollen. Die eine von ihnen hat als Ordinate die Potenzsummen von B (1 kann man als B^0 auffassen), die andere ist eine Gerade durch den Nullpunkt.

Um zu den Werten B und C zu gelangen, bildet man am besten das Differenzenschema, das so aussieht:

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ B+C & -1+B+C & =2[a,b] \\ B^2+C & -B+B^2 & =2[a,c] \\ B^3+C & -B^2+B^3 & =2[a,d] \\ B^4+C & -B^3+B^4 & =2[a,e] \end{array}$$

B bestimmt man dann am besten aus der Gleichung

$$(20) \qquad -B+B^2=2[a,c]$$

und setzt den gefundenen Wert ein in die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \operatorname{str}(g_3-g_1)^2-1-B & =C \\ \operatorname{str}(g_4-g_1)^2-1-B-B^2 & =2C \\ \operatorname{str}(g_5-g_1)^2-1-B-B^2-B^3 & =3C \\ \operatorname{str}(g_6-g_1)^2-1-B-B^2-B^3-B^4 & =4C. \end{array}$$

Dividiert man die Summen der linken Seite durch 10, so erhält man C. Setzt man das wieder rückwärts ein, so kommt man zu den Widersprüchen „Beobachtung minus Rechnung".

Führt man die Rechnung durch, so erhält man Kurven, die sich den beobachteten recht gut anschließen. Bei allen Kurven, die den mehrfach erwähnten Knick aufweisen, ist B negativ. Aber auch die übrigen Uhren lassen sich auf diese Weise behandeln, sowohl die L-, wie die A-, wie auch die Pendeluhren bei Thierig! Außer bei LAg und $A1k$ wird der mittlere Widerspruch kleiner, ganz erheblich sogar dort, wo er vorher auffällig groß war, nämlich bei $A1k$, $A2k$, und bei allen $A\,nk$. Für die Pendeluhren ist die Größe früher nicht berechnet worden. Er wird hier aber durchaus von der Größenordnung der übrigen und zugleich von F, etwa 0.06, was auch mit den Geyschen Angaben gut übereinstimmt. Die Werte von B, C und den zugehörigen M sind in Tabelle V zusammengestellt.

§ 28. „Und freilich ist nicht viel damit getan“, wird mir hier wohl mancher einwerfen, der hinter diesem Rechengesetz die physikalische Deutung vermißt. Dieser Ansicht ist wohl auch Thierig, wenn er nach Aussprechen der Vermutung, daß das Gesetz für Pendeluhren einer stark gedämpften Schwingung zu ähneln scheine, fortfährt: „Es ist mir aber nicht gelungen, dafür einen passenden analytischen Ausdruck zu finden, ganz abgesehen davon, daß damit für die physikalische Deutung dieser merkwürdigen Erscheinung wenig erreicht wäre.“ Ich habe natürlich auch versucht, für die Gänge einen Ansatz herzustellen, der auf das gefundene Gesetz führt, doch vergeblich! Der Übergang von den Streuungsquadraten der Differenzen rückwärts zu den Argumenten ist eben nicht ohne weiteres ausführbar. Trotzdem bin ich nicht der Meinung, das Rechengesetz sei ohne jeden Wert. Man tappt ja doch bezüglich der Nachwirkung bei Uhren noch ziemlich im Dunkeln. Und wenn das Gesetz der konstanten Nachwirkung zunächst einmal brauchbare Ergebnisse geliefert hat, so ist es doch nicht ausgeschlossen, daß noch ein anderes Gesetz aufgestellt wird, dem sich auch die bisher widerspenstigen Fälle einordnen und das vielleicht das Gesetz der konstanten Nachwirkung als Spezialfall in sich begreift. Gar oft aber wird einem solchen „inneren“ Gesetze, wie ich es nennen möchte, die Auffindung eines „äußeren“ Gesetzes über den zahlenmäßigen Verlauf vorangehen müssen. Und wie ist denn der geschichtliche Lauf der Dinge gewesen? Haben wir nicht gerade an den größten Entdeckungon der Astronomie ein treffendes Beispiel dazu? Die Keplerschen Gesetze für die Planetenbahnen waren nur „äußere“ Gesetze; das sieht man am besten daran, daß Kepler für die Auffindung der Gestalt der Bahn einfach eine ganze Anzahl Kurven durchrechnete, bis er — zufällig möchte man beinahe sagen — auf die Ellipse kam, wo dann Beobachtung und Rechnung übereinstimmte. Das „innere“ Gesetz, die dynamische Deutung, brachte erst viele Jahre später Newton mit der Entdeckung der Gravitation.

§ 29. Ich möchte nicht schließen, ohne auf noch einen Umstand hinzuweisen. Wenn man nämlich einen tieferen Einblick in die physikalischen Vorgänge eines Uhrwerks gewinnen will, so wird es vielleicht nötig sein, die Beobachtungsweise zu ändern und zu verschärfen. Es sei mir gestattet, kurz an einem Beispiel klarzulegen, was ich damit meine. Nehmen wir an, wir hätten eine Fallmaschine vor uns und beobachteten nach Beginn des Falles am Ende jeder Sekunde den Ort des Gewichts, d. h. die Höhe über dem Fußboden. Wir nehmen weiter an, neben der Maschine befinde sich ein Mensch, der ein genau gleiches Gewicht zwischen den Fingern hält und es so bewegt, daß es zu den Beobachtungszeiten mit dem Gewicht der Maschine immer in gleicher Höhe ist. Legt man nun die beiden Beobachtungsreihen einem Unbefangenen vor, so wird er sie nicht voneinander unterscheiden können, und wohl aus beiden auf dieselbe Kraft als Bewegungsursache schließen. Einen Unterschied zu machen wird erst dann möglich sein, wenn zu den Beobachtungswerten Notizen über die näheren Umstände hinzutreten, also das eine Mal: „Gewicht hängt an einem Faden, andere Einflüsse sind nicht sichtbar“, das andere Mal: „Gewicht befindet sich in der Hand eines Menschen.“ Dann wird sofort klar sein, daß die bewegende Kraft nicht in beiden Fällen dieselbe ist. Aber weiter! Aus den Beobachtungswerten können wir auch nicht ersehen, wie die Bewegung in der Zwischenzeit ist, ob sie also stetig mit gleichförmiger Beschleunigung, oder ob sie ruckweise erfolgt, und ob sie innerhalb eines Ruckes gleichförmig oder ungleichförmig erfolgt. Über all diese Dinge können wir nicht urteilen, wenn uns nur die Beobachtungswerte vorliegen, und damit auch nicht, oder nur mit Vorsicht, über die Kräfte, die die Bewegung verursachen.

Und die Nutzanwendung auf die Uhren? Nun, auch hier haben wir nur die Korrektionen, die jeden Tag um dieselbe Zeit bestimmt werden. Was inzwischen vorgegangen ist, darüber wissen wir nichts. Es ist sehr wohl möglich, daß sich Ähnliches ereignet hat, wie in unserm Beispiel. Die Temperaturänderung wird immer, wenn auch noch so geringen Einfluß auf das Räderwerk ausüben, es können sich winzige Spannungen bilden, die erst etwas anwachsen müssen, ehe sie sich — vielleicht ruckweise! — ausgleichen können. Es können auch ganz kleine Reibungsänderungen, oder auch molekulare Änderungen eintreten; die geringfügigsten Ursachen werden ja in einem so subtilen Mechanismus schon eine fühlbare Wirkung ausüben. Aber über alles das fehlen uns die Notizen, wir kennen das alles nicht; uns liegen lediglich die um 86400 Sekunden auseinanderstehenden Beobachtungen der Korrektion vor! Ich sagte schon: man müßte die Beobachtungsweise verschärfen, wenn man sich mehr Kenntnisse verschaffen will. Aber wie das auszuführen ist, und ob das je den Aufwand an Arbeit lohnen würde, das ist eine andere Frage. Mir kam es hauptsächlich darauf an, darzulegen, wie wenig über die hier waltenden Kräfte Klarheit herrscht: daß das Gesetz der konstanten Nachwirkung daher nur eine von vielen möglichen Annahmen ist, daß aber anderseits auch ein äußeres Gesetz imstande sein kann, den Einblick in den inneren Zusammenhang der Dinge zu fördern.

Schluß.

§ 30. Faßt man die Ergebnisse der Arbeit zusammen, so kann man folgendes sagen:

nur mit Vorsicht, über die Kräfte, die die Bewegung verursachen.

Und die Nutzanwendung auf die Uhren? Nun, auch hier haben wir nur die Korrektionen, die jeden Tag um dieselbe Zeit bestimmt werden. Was inzwischen vorgegangen ist, darüber wissen wir nichts. Es ist sehr wohl möglich, daß sich Ähnliches ereignet hat, wie in unserm Beispiel. Die Temperaturänderung wird immer, wenn auch noch so geringen Einfluß auf das Räderwerk ausüben, es können sich winzige Spannungen bilden, die erst etwas anwachsen müssen, ehe sie sich — vielleicht ruckweise! — ausgleichen können. Es können auch ganz kleine Reibungsänderungen, oder auch molekulare Änderungen eintreten; die geringfügigsten Ursachen werden ja in einem so subtilen Mechanismus schon eine fühlbare Wirkung ausüben. Aber über alles das fehlen uns die Notizen, wir kennen das alles nicht; uns liegen lediglich die um 86400 Sekunden auseinanderstehenden Beobachtungen der Korrektion vor! Ich sagte schon: man müßte die Beobachtungsweise verschärfen, wenn man sich mehr Kenntnisse verschaffen will. Aber wie das auszuführen ist, und ob das je den Aufwand an Arbeit lohnen würde, das ist eine andere Frage. Mir kam es hauptsächlich darauf an, darzulegen, wie wenig über die hier waltenden Kräfte Klarheit herrscht: daß das Gesetz der konstanten Nachwirkung daher nur eine von vielen möglichen Annahmen ist, daß aber anderseits auch ein äußeres Gesetz imstande sein kann, den Einblick in den inneren Zusammenhang der Dinge zu fördern.

Schluß.

§ 30. Faßt man die Ergebnisse der Arbeit zusammen, so kann man folgendes sagen:

Tabelle I.

Die reduzierten Abhängigkeitszahlen q_0 bei den *L*- und *Ak*-Uhren.

	LAg	*LAu*	*LBg*	*LBu*	*A1k*	*A2k*	*A3k*
a, b	— 0.10	— 0.06	— 0.23	— 0.29	— 0.48	— 0.44	— 0.38
a, c	— 0.11	— 0.10	+ 0.03	— 0.06	+ 0.09	+ 0.02	— 0.02
a, d	— 0.15	+ 0.03	— 0.14	— 0.10	+ 0.01	+ 0.02	— 0.10
a, e	— 0.04	— 0.05	+ 0.09	+ 0.10	— 0.10	+ 0.03	+ 0.05
a, f	+ 0.11	— 0.01	+ 0.01	— 0.02			
a, g	+ 0.06	+ 0.12	— 0.01	— 0.01			

Tabelle II.

Die reduzierten Abhängigkeitszahlen q_0 in den Gruppen III bei Gey.

	L III	*H* III	*E* III	*Z* III
a, b	— 0.30	— 0.18	— 0.12	— 0.18
a, c	+ 0.08	— 0.02	— 0.04	— 0.04
a, d	+ 0.03	— 0.10	+ 0.01	+ 0.07
a, e	— 0.03	— 0.06	— 0.01	— 0.02

Tabelle III.

Die reduzierten und vom Temperatureinfluß befreiten Abhängigkeitszahlen q_0 bei den *Ank*.

	A 1 *nk*	*A* 2 *nk*	*A* 3 *nk*
a, b	— 0.70	— 0.71	— 0.64
a, c	+ 0.21	+ 0.21	+ 0.22
a, d	— 0.09	— 0.14	— 0.05

Tabelle IV.

	m	n	G	M	F	$h^2 \cdot \mathrm{str}\, a^2$	$\mathrm{str}\, g_1$	$\mathrm{str}\, x$	$\mathrm{str}\, x : \mathrm{str}\, g_1$
$LAg(7)$	341	0.78	2.225	0.18	0.08	810.95	4.25^s	2.66^s	0.63
$LAu(7)$	345	0.90	4.879	0.15	0.08	953.54	6.82^s	2.97^s	0.44
$LBg(7)$	269	0.85	2.845	0.16	0.09	40.50	1.07^s	0.57^s	0.53
$LBu(7)$	266	0.68	1.333	0.17	0.09	44.15	0.77^s	0.56^s	0.73
$LAg(5)$	341	0.69	1.718	0.07	0.08	810.95	3.73^s	2.70^s	0.72
$LAu(5)$	345	0.89	4.439	0.05	0.08	953.54	6.50^s	2.97^s	0.46
$LBg(5)$	269	0.77	2.004	0.10	0.09	40.50	0.90^s	0.57^s	0.63
$LBu(5)$	266	0.59	1.121	0.09	0.09	44.15	0.70^s	0.57^s	0.80
$A\,1\,k$	263	0.42	0.734	0.15	0.09	63.31	0.68^s	0.62^s	0.91
$A\,2\,k$	283	0.48	0.811	0.18	0.08	24.41	0.45^s	0.39^s	0.87
$A\,3\,k$	280	0.39	0.775	0.06	0.09	15.51	0.35^s	0.32^s	0.91
$A\,1\,nk$	281	−0.44	0.315	0.14	0.08	1533.14	2.20^s	1.97^s	0.90
$A\,2\,nk$	281	−0.50	0.295	0.20	0.08	1504.26	2.11^s	1.82^s	0.86
$A\,3\,nk$	276	−0.22	0.424	0.10	0.09	1792.57	2.76^s	2.69^s	0.98

Tabelle V.

	B	C	M
	+0.31	+0.42	0.16
	+0.22	+0.66	0.03
	−0.06	+0.55	0.10
	+0.14	+0.25	0.06
	−0.15	+0.18	0.06
	−0.04	+0.18	0.04
	+0.04	+0.16	0.09
	−0.32	−0.08	0.03
	−0.33	−0.11	0.06
	−0.34	+0.06	0.02
T, D	−0.09	+0.16	0.06
D, F	−0.12	+0.25	0.06
T, F (Pendeluhren bei Thierig!)	−0.10	+0.16	0.05

Lebenslauf.

Ich, Rudolf Erhard Kleinstück, ev.-luth. Bekenntnisses, wurde am 8. April 1890 in Zwätzen b. Jena geboren als Sohn des Lehrers an der dortigen Ackerbauschule Dr. Otto Kleinstück. Nach dem Tode meines Vaters im Jahre 1891 siedelte meine Mutter nach Dresden über. Hier besuchte ich die I. Bürgerschule von Neujahr 1896 bis Ostern 1899, von da ab das Gymnasium zum heiligen Kreuz, das ich Ostern 1908 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Danach begann ich das Studium der Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule zu Dresden, das ich im fünften Semester an der Universität München, vom sechsten Semester ab an der Universität Leipzig fortsetzte.

Allen meinen Lehrern bin ich zu großem Danke verpflichtet. Insbesondere aber spreche ich Herrn Geheimen Hofrat Prof. Dr. H. Bruns meinen aufrichtigsten Dank aus für die mannigfache Unterstützung und Anregung, die ich von ihm während meines Studiums und vor allem bei der Anfertigung der vorliegenden Arbeit erfahren habe.